Unalmas analízis?

Pintér Lajos 80. születésnapjára

Totik Vilmos

September 7, 2014

1977 áprilisában egy szép tavaszi napon Pintér Lajos bement Szegeden a IV. éves programtervező matematikusokhoz differenciálegyenlet-gyakorlatot tartani, és az alábbi feladatot diszkutálta. *A sík bizonyos rácspontjaiban (egész koordinátájú pontjaiban) békák vannak, amelyek a következőképpen mozognak: egy béka átugorhat egy mellette álló békát, ha a mögötte levő rácspont üres, viszont az átugrott béka ekkor lekerül a síkról. Igazolni kell, hogy ha kezdetben egyetlen béka sincs a felső félsíkon, akkor soha nem juthatnak el 5 magasságba (azaz az $y = 5$ egyenest nem tudják elérni).*

Ez a feladat John Conwaytól származik (nála békák helyett katonák voltak, ld. [2, 154. oldal]), és megoldása, amit Pintér tanár úr az órán elmondott, a következő. Azt igazoljuk, hogy pl. a $(0, 5)$ pontba nem lehet békát eljuttatni. Ehhez legyen $q = (\sqrt{5}-1)/2$ (az aranymetszés arányszáma), és az (i, j) pontba helyezzük el a $q^{|i|+|j-5|}$ súlyt (ld. az 1. ábrát). Itt a kitevő az a szám, ahány (minimális számú) lépéssel a $(0, 5)$ pontból eljuthatunk az (i, j) pontba. Azt fogjuk vizsgálni, hogy azon mezők összsúlya hogyan változik, amelyeken béka áll. Ehhez vegyük észre, hogy $q + q^2 = 1$ (ezért választottuk q-t annak aminek), így ha egy ugrás során, pl. az (i, j) pontból az $(i + 2, j)$ pontba ugorva, közeledünk a $(0, 5)$ ponthoz (azaz $i < -1$), akkor az összsúly változása:

$$q^{|i+2|+|j-5|} - q^{|i+1|+|j-5|} - q^{|i|+|j-5|} = q^{|i+2|+|j-5|}(1 - q - q^2) = 0$$

(valóban, (i, j)-ben és $(i+1, j)$-ben állt egy-egy béka, és helyettük az ugrás után $(i + 2, j)$-ben lesz egy béka). Hasonlóan látható, hogy ha egy ugrás során nem közeledünk a $(0, 5)$ ponthoz, akkor az összsúly csökken (pl. ha a fenti összegben $i \geq 0$, akkor az összsúly-változás

$$q^{i+2+|j-5|} - q^{i+1+|j-5|} - q^{i+|j-5|} = q^{i+|j-5|}(q^2 - q - 1) < 0.$$

Mármost egyszerű számolás adja, hogy a teljes alsó félsíkon (beleértve a számegyenest is) levő súlyok összege 1, így a kezdeti konfigurációnál a teljes összsúly legfeljebb 1. Márpedig a békák ugrálása során az összsúly nem nő, így az nem lehetséges hogy végül olyan konfigurációhoz érkezzünk amelyben egy béka áll a

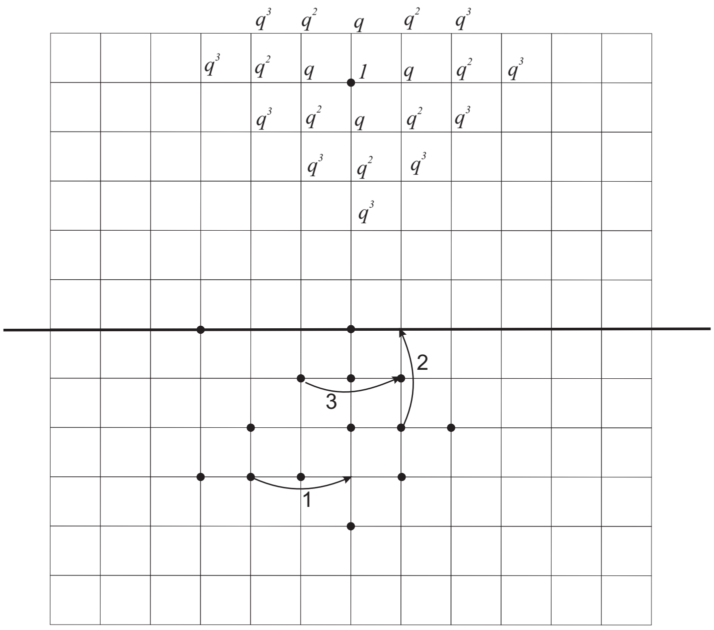

Figure 1: 3 egymásutáni megengedett béka-lépés

$(0, 5)$ pontban, hiszen csupán ehhez a békához rendelt súly 1 (és vagy eleve 1-nél kisebb összsúlyunk volt ha az alsó félsík nem minden mezején állt eredetileg béka, vagy pedig ha minden mezőn állt egy, akkor a végállásban is lesznek az alsó félsíkon békák, hiszen e végállásig véges sok lépést tettünk meg).

Természetesen a fenti feladatnak semmi köze nem volt a differenciálegyenlet-gyakorlaton egyébként vett anyaghoz, viszont a hallgatókban érdeklődést váltott ki, és figyelmesen követték a diszkussziót. Pintér Lajos máskor is élt az oktatói szabadság ilyetén való alkalmazásával, és gyakran hallottunk tőle érdekes feladatokat, levezetéseket. Ez annyira megmaradt bennem, hogy későbbi tanári pályámon magam is gyakran folyamodtam a figyelemfelkeltésnek ehhez az eszközéhez; mind a mai napig szinte mindig mondok olyan feladatokat ill. a matematika történetetéből olyan eseményeket, példákat, amelyek az éppen tárgyalt anyagrészről jutnak eszembe, még ha azok szigorúan nem is részei az tárgyalt anyagnak. Gyakran azonban még erre sincs szükség, kis odafigyeléssel sokszor az éppen tárgyalt területen is találhatunk olyan feladatokat, amelyek a hallgatók érdeklődését felkelthetik ill. fenntarthatják. Az alábbiakban néhány ilyen feladatot tárgyalok az analízis területéről.

A matematikai analízis a matematika valószínűleg leghatékonyabb módszere, amely Newton és Leibniz óta hihetetlen mértékben átalakította a tudományokat és igazi sikertörténet. Viszont ennek elsajátítása csak rendkívül sok gyakorlással lehetséges; differenciálni vagy integrálni csak úgy lehet megtanulni, ha az ember megcsinál sok-sok tucat deriválást és integrálást. Ezt gyakran a hallgatók (és sokszor maguk az oktatók is) unalmasnak, rutinszerűnek tartják, és ha egy csoporttal már 4-5 alkalommal differenciálunk vagy integrálunk, elkerülhetetlenül lankad a figyelem, és a gyakorlat sem éri el célját. Ilyenkor sokat segíthet egy-egy olyan feladat, amelyek a szokásostól kicsit eltérnek és megmozgatják a hallgatók fantáziáját.

Annak illusztrálására, hogy a Pintér tanár úrtól ellesett módszernek igenis van jogosultsága az oktatásban elég megemlíteni, hogy én azt már régen elfelejtettem milyen feladatokat tárgyaltunk 1977 tavaszán differenciálegyenlet-gyakorlatokon, viszont a békás feladatra és annak megoldására máig emlékszem.

1 Oroszlán és szelídítője

Ez a feladat a

$$\sum \frac{1}{n} = \infty, \qquad \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

összegek alkalmazását illusztrálja. A feladatot először valószínűleg szintén Pintér Lajostól hallottam, eredetileg Richard Rado egy problémája volt.

Egy megvadult oroszlán és szelídítője egyforma maximális sebességgel tudnak mozogni egy ketrecben. A feladat az, hogy a szelídítő hogyan kerülheti el, hogy az oroszlán valaha is elkapja (mindkettőt pontszerűnek tételezzük fel).

A feladat egyszerű lenne ha az egész sík a szelídítő rendelkezésére állna, hiszen akkor az oroszlánnal átellenes irányban maximális sebességgel futva egy egyenes mentén az oroszlán soha nem érhetné utol. A nehézség abból ered, hogy a ketrec behatárolja a mozgásukat.

A megoldás a következő. Feltehető, hogy mindkettejük maximális sebessége 1. Legyen kezdetben a szelídítő az origóban, és tegyük fel, hogy az origó körüli R sugarú körlap is még a ketrecben van. Mármost egy kis r pozitív számot választva a szelídítő $n = 1, 2, 3, \ldots$-ra rendre menjen r/n ideig merőlegesen az őt az oroszlánnal összekötő szakaszra maximális sebességgel úgy, hogy az origóhoz a lehető legközelebb kerüljön (ez utóbbi feltétel kijelöli a mozgás irányát a kettejüket összekötő szakaszra merőleges egyenesen). Pontosabban, itt ütemezéssel $n = 1, 2, \ldots$ lépésről beszélünk, és az n-edik lépésben mozogjon a szelídítő arra a szakaszra merőlegesen, amely őt az előző lépés megtétele után köti össze az oroszlánnal (ld. 2. ábra).

Az biztos, hogy az oroszlán nem fogja semelyik lépésben elkapni a szelídítőt, hiszen ha ez nem történt meg n lépés után, akkor kettejük távolsága pozitív, és mivel a szelídítő az $(n+1)$-edik lépésben egy, az őt az oroszlánnal összekötő szakaszra merőleges egyenesen mozog, távolságuk pozitív lesz az $(n+1)$-edik lepés után is. Tehát ha a fenti stratégia alkalmazható úgy, hogy a szelídítő soha nem ütközik a ketrec falába, akkor elkerüli azt, hogy az oroszlán elkapja, hiszen a fenti lépések során eltelt idő

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n} = r \sum_{n} \frac{1}{n} = \infty.$$

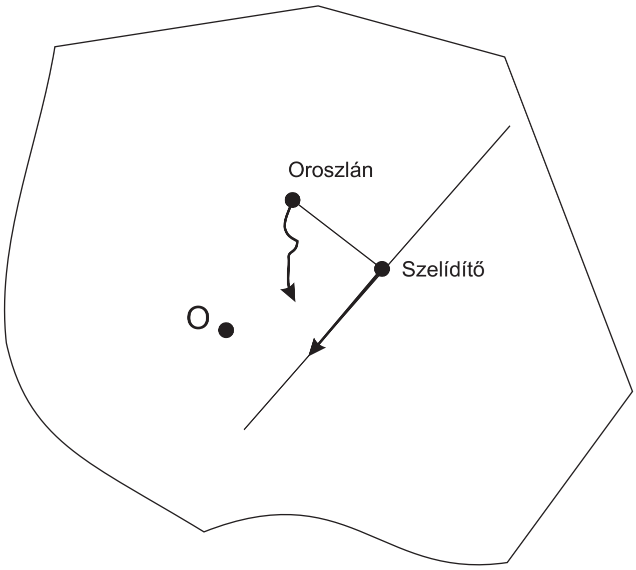

Figure 2:

Azt kell tehát csak igazolnunk, hogy a fenti stratégiával soha nem ütközik a szelídítő a ketrec falába, és ehhez elég megmutatni, hogy az origótól vett távolsága mindig kisebb R-nél. Legyen d_n az origótól vett távolsága n lépés után; d_0 a kezdeti távolság. Ekkor $n = 0, 1, 2, \ldots$-re vagy $d_n \le r$ és így $d_{n+1} \le d_n + r/(n+1) \le 2r$, vagy pedig $d_n > r$ és ekkor, mint azt elemi geometriai meggondolás mutatja,

$$d_{n+1} \le \sqrt{d_n^2 + (r/(n+1))^2} \le d_n + r^2/2d_n(n+1)^2 \le d_n + r/2(n+1)^2.$$

Tehát mindenképpen

$$d_n \le 2r + \frac{r}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2},$$

ami R-nél kisebb ha r elég kicsi (felhasználva, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2,$$

adódik, hogy az $r = R/3$ választás megfelelő).

Egy másik megoldásra ld. [1], 1. feladatát.

2 Csiga és a gonosz fiú

Ez a feladat az

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x \to \infty \qquad \text{ha } x \to \infty$$

illusztrálására szolgál.

Egy 1 m hosszú gumiszalag egyik vége rögzített, és ebben a végében van egy csiga, amely 1 m/h sebességgel tud mászni. A szalag másik végében a csiga számára valami ínyencfalat van elhelyezve, amit a csiga szeretne megkaparintani. Viszonyt egy gonosz fiú elkezdi húzni a szalag szabad végét 10000 m/h sebességgel. A kérdés az, hogy végül a csiga hozzájut-e az ínyencfalathoz, azaz eléri-e a szalag másik, mozgó végét?

A megoldáshoz legyen a szalag rögzített vége az origóban, a fiú szaladjon az x tengelyen pozitív irányban, és a t időpontban legyen a csiga helyzete az $y(t)$ pontban. Tehát $y(0) = 0$, és a fiú helyzete a t időpontban $1 + 10000t$. Vegyük észre, hogy a csiga valódi sebessége két komponensből áll: egyrészt a saját 1 m/h sebességéből, másrészt abból a sebességből, amivel a mögötte levő szalagrész nyúlik. Arányos nyúlást feltételezve ez $y(t)/(1 + 10000t)$-szer akkora mint a fiú sebessége, tehát a csiga sebessége

$$1 + 10000\frac{y(t)}{1 + 10000t} \qquad \text{(m/s)}.$$

Tudjuk, hogy ez a hely-idő függvény deriváltjával megegyezik, tehát

$$y'(t) = 1 + 10000\frac{y(t)}{1 + 10000t}.$$

Osszunk végig $(1 + 10000t)$-vel:

$$\frac{y'(t)}{1 + 10000t} - 10000\frac{y(t)}{(1 + 10000t)^2} = \frac{1}{1 + 10000t},$$

és vegyük észre, hogy itt a bal oldalon az $y(t)/(1+10000t)$ deriváltja áll, míg a jobb oldalon levő kifejezés $\ln(1 + 10000t)/10000$ deriváltja. Tehát

$$\left(\frac{y(t)}{1 + 10000t}\right)' = \left(\frac{\ln(1 + 10000t)}{10000}\right)'.$$

Mindkét oldalt 0-tól T-ig integrálva és figyelembe véve, hogy $y(0) = 0$ és $\ln 1 = 0$, kapjuk, hogy

$$\frac{y(T)}{1 + 10000T} = \frac{\ln(1 + 10000T)}{10000}$$

(ez a formula integrálás nélkül is adódik abból, hogy ha két függvény deriváltja egyenlő, akkor ők csak konstansban különböznek). A bal oldalon éppen a csiga ill. a fiú (T időpillanbeli) origótól vett távolságának a hányadosa áll, és az eredeti kérdés az, hogy ez valamikor lesz-e 1. Mármost a jobb oldal folytonosan nő 0-tól a végtelenig mialatt T befutja a $[0, \infty)$ intervallumot, így lesz egy olyan T időpont (ez éppen $T = (e^{10000} - 1)/10000$), amikor az értéke éppen 1. Tehát ebben az időpillanatban a csiga utoléri a szalag másik végét.

Figure 3:

3 Körlap fedése sávokkal

Ez a feladat az alábbi formula alkalmazására szép példa: ha adott egy nemnegativ $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon és a görbéjét megforgatjuk az x tengely körül, akkor az így kapott forgásfelszín

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{1}$$

Igazolandó, hogy egy 100 sugarú körlapot nem lehet 199 db 1 szélességű sávval lefedni.

Jegyezzük meg, hogy 200 db. 1 szélssségű sávval könnyű lefedni pl. az origó körüli 100 sugarú körlapot; ehhez nem kell mást tennünk, mint hogy az $x = j$, $j = -100, -99, \ldots, 99, 100$ egyenesek által meghatározott sávokat tekintjük.

Általában az eredmény, amit igazolunk, az az, hogy ha $d_1, \ldots, d_k$ szélességű sávokkal lefedhető egy R sugarú körlap, akkor

$$2R \le d_1 + \cdots + d_k.$$

Az igazoláshoz legyen az R sugarú D körlap középpontja az origó, és képzeljünk el egy G gömbfelületet ezen körlap fölé (pontosabban, a körlap határa legyen e gömbfelület egy főköre). Ha van egy d szélességű S sávunk, akkor ennek D-vel vett metszetét vetítsük fel az G gömbfelületre (ld. a 3. ábrát).

Így egy gömbgyűrűt kapunk a gömb felületén, amelynek felszínét könnyen kiszámíthatjuk az (1) formulával. Valóban, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az S sáv merőleges az x tengelyre, azaz S azon (x, y) pontokból áll, amelyekre $a \leq x \leq b$ valamely $-R \leq a < b \leq R$, $b-a=d$ számokkal. Ekkor a felvetítéssel kapott gömbgyűrű nem más, mint az $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [a, b]$, függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott felület, így ennek felszínét (1) adja az $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ választással. De itt

$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} = R,$$

ezért a kérdéses felszín $2\pi R(b-a) = 2\pi d$. Ami igazán meglepő ebben a formulában az az, hogy a felszín nem függ attól, hogy a gömbgyűrű hol helyezkedik el, az csak a gömbgyűrű magasságától függ (ennek a ténynek az ún. hengeres vetítéssel kapcsolatos következményeire vonatkozóan ld. pl. a [3] dolgozatot). Mármost ha a $d_1, \ldots, d_k$ szélességű $S_1, \ldots, S_k$ sávok lefedik az R sugarú D körlapot, akkor a megfelelő $S_i \cap D$ metszetek felvetítettjei lefedik a G gömbfelületet, így összfelszínük legalább akkora, mint G felszíne, azaz $4\pi R^2$. A fentiekben láttuk, hogy $S_i \cap D$ felvetítettjének felszíne legfeljebb $2\pi d_i R$ (itt egyenlőség van, ha az S_i sáv mindkét oldala metszi a D körlapot), ezért végkonklúzióként felírhatjuk, hogy

$$2\pi d_1 R + \cdots + 2\pi d_k R \geq 4\pi R^2,$$

amiből az állítás $2\pi R$-rel való osztással adódik.

Végezetül megemlítünk még két hasonló feladatot.

4 Téglalaplefedés

Ez az $(e^z)' = e^z$ azonosság egy alkalmazására lehet példa.

Ha egy téglalap felbontható olyan téglalapokra, amelyek valamelyik oldalhossza egész, akkor az eredetinek is valamelyik oldalhossza egész.

Ehhez integráljuk az $e^{i2\pi(x+y)}$ függvényt a fenti téglalapokon, és használjuk fel az $(e^z)' = e^z$ azonosságot (valós ill. képzetes részeket véve elkerülhető a komplex függvények használata, de ekkor a megoldás kevésbé elegáns. Több más megoldás található a [4] cikkben).

5 Afrikai szafári

Ez a feladat függvénytranszformációkkal kapcsolatban említhető meg.

Valahány oázisban annyi üzemanyag van elhelyezve, amely éppen elég egy körútra közöttük. Ekkor valamelyik oázisból elindulva a körút megtehető.

A megoldás abból áll, hogy kiindulunk valamelyik oázisból, felrajzoljuk a "kocsiban levő üzemanyag"–"megtett út" grafikont, és észreveszük, hogy más oázisból elindulva a megfelelő grafikon az eredetinek egy transzformáltja. Mármost a feladat az, hogy ez a transzformáció lehet olyan, hogy utána a grafikon minden pontja a "megtett út" tengelyen, vagy a fölött van. Egy másik megoldásra ld. az [1] könyv 7. feladatát.

References

[1] B. Bollobás, *The art of mathematics*, Cambridge University Press, 2007.

[2] Csákány Béla, *Matematikai játékok*, Polygon, 2005.

[3] Totik Vilmos, Lépjünk ki a térbe!, *Polygon*, **2**(1993), 104–111.

[4] S. Wagon, Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle, *Amer. Math. Monthly*, **94**(1987), 601–617.

Bolyai Intézet
Szeged, Aradi v. tere 1
6720
totik@u-szeged.hu